STT1000

Chapitre 9 Analyse de variance

Exercices

2017-12-30

9.1 Montrez que le test de *Student* pour comparer deux moyennes est équivalent à une analyse de variance.

9.2 Supposons que M. Martin peut se rendre chez lui le soir par trois routes différentes. Il essaye chacune d'elles 5 fois en prenant note du temps à chaque fois. Voici les résultats, en minutes :

Route 1 : 22, 26, 25, 25, 3l
Route 2 : 25, 27, 28, 26, 29
Route 3 : 26, 29, 33, 30, 33.

Testez à 5% l'hypothèse que les trois routes sont comparables.

9.3 [*Exemple tiré de Snedecor et Cochran*] Une expérience est menée afin de comparer 4 traitements sur la culture de la betterave à sucre. Chaque traitement a été appliqué à 5 champs, et la récolte moyenne par arpent a été notée. Voici les résultats en centaines de livres.

		Engrais appliqué…		
	Pas d'engrais	en janvier par labourage	en janvier à la volée	en avril à la volée
Moyenne	38,7	48,7	48,8	45,0

Les calculs ont donné : $\hat{\sigma}^2 = 7{,}443$. Testez chacune des hypothèses suivantes :

a) L'engrais n'a aucun effet.

b) En moyenne, l'engrais appliqué en janvier n'a ni plus ni moins d'effet que lorsqu'il est appliqué en avril.

c) L'engrais appliqué à la volée en janvier a le même effet que lorsqu'il est labouré.

Dans les cas b) et c), déterminez un intervalle de confiance pour l'effet étudié.

9.4 Dans une grande classe de statistique, les élèves proviennent de 4 groupes distincts, définis comme suit :

Groupe 1 : Les élèves n'ayant suivi aucun cours de mathématiques au Cégep
Groupe 2 : Les élèves ayant suivi des cours de mathématiques et de statistique
Groupe 3 : Les élèves ayant suivi des cours de mathématiques mais pas de statistique
Groupe 4 : Les élèves ayant terminé un programme de science au Cégep.

Les étudiants des groupes 1, 2 et 3 suivaient un programme autre que sciences. Les résultats au cours de statistique sont pr1ésentés dans le tableau 9.2.

Tableau 9.2

Notes en statistique de quatre groupes d'étudiants

Groupe 1 Ni math ni stat		Groupe 2 Math et stat		Groupe 3 Math sans stat		Groupe 4 Sciences	
66	69	63	58	36	48	45	83
35	87	51	47	72	78	91	88
61	82	29	38	32	45	56	67
74	80	53	50	91	47	82	67
47	84	63	68	75	50	131	84
72	54	45	66	63	53	88	83
57	66	33	37	85	21	68	54
48	35	84	62	54		51	81
55	40	83	68			84	57
		59	74			60	56
		83	60			83	44
						75	

a) Dressez une table d'analyse de variance

b) Testez l'hypothèse que la moyenne du groupe 4 est égale à la moyenne des trois autres moyennes.

c) Testez l'hypothèse que la moyenne du groupe 2 est égale à la moyenne du groupe 3.

d) Selon les dires des enseignants de statistique, la performance d'un étudiant dans un cours universitaire de statistique dépend surtout de sa compétence en mathématiques (et non en statistique). Cette information a priori, ajoutée au résultat en c), suggère qu'il est raisonnable de considérer les groupes 2 et 3 comme étant comparables. Donc réunissez ces deux groupes en un seul et reprenez l'analyse.

e) Désignons les trois moyennes du modèle développé en d) par μ_1, μ_{23}, et μ_4. Dans ce modèle, tester l'hypothèse que la moyenne des étudiants en sciences est égale à la moyenne des deux autres moyennes, c'est-à-dire, $\mu_4 = (\mu_1 + \mu_{23})/2$.

f) Dans le modèle en d) tester l'hypothèse que la moyenne du groupe 1 est égale à la moyenne des groupes 2 et 3 réunis ($H_o : \mu_1 = \mu_{23}$dans la notation en e)).

g) Combinez les 3 premiers groupes et tester l'hypothèse que la moyenne du groupe reconstitué (réunissant les groupes 1, 2 et 3) est égale à la moyenne du groupe 4.

h) Résumer l'ensemble de vos conclusions

9.5 Lors d'une étude sur le « concept de soi » des adolescents nigérians, un chercheur [Jegede, R. Olukayode, *The Journal of Psychology* 110, 249-261 (1982)] a administré le test *Piers-Harris Self-Concept Scale* à 1380 élèves de niveau secondaire à Ibadan.

a) Le score moyen a été de 58,19 avec un écart-type de 10,06. Dans une étude faite antérieurement auprès de 1183 adolescents américains on avait trouvé une moyenne de 51,84 avec un écart-type de 13,87. La différence entre le Nigérians et les Américains est-elle significative ? Supposez que la variance σ^2 des deux groupes est la même et estimez σ^2.

b) L'échantillon de Jegede était composé de 552 filles et 828 garçons. Les filles avaient une moyenne de 56,82 avec un écart-type de 9,96; et les garçons une moyenne de 59,11 avec un écart-type de 10,01. La différence entre les garçons et les filles est-elle significative ? Supposez que la variance σ^2 des deux groupes est la même et estimez σ^2.

c) Maintenant traitez simultanément les trois groupes : filles nigérianes, garçons nigérians, et Américains. Testez l'hypothèse que les moyennes de trois groupes (μ_1, μ_2 et μ_3, respectivement) sont égales. Supposez que la variance σ^2 des trois groupes est la même et estimez σ^2.

d) Dans le cadre du modèle en c) testez l'hypothèse que les filles et les garçons nigérians ont la même moyenne. On rejette l'hypothèse ici comme on la rejette en b). Qu'est-ce qui explique que la statistique *t* est légèrement plus petite ici qu'en c)?
$\hat{\varphi}$ = -2,23; $\hat{\sigma}$ = 11,93922; $\hat{\sigma}_{\hat{\varphi}}$ = 5,00,656; T = 3,49; vp = 0,0005. On peut rejeter l'hypothèse avec confiance.

e) Dans le cadre du modèle en c) testez l'hypothèse que la moyenne des Américains est égale à la moyenne des Nigérians en supposant qu'il y a autant de filles que de garçons au Nigéria (en d'autres termes, vous devez tester l'hypothèse que $\mu_3 = (\mu_1 + \mu_2)/2$.)

9.6 Dans une étude sur la relation entre certains traits de personnalité et des facteurs astrologiques, des chercheurs [Sakofske, Kelly et McKerracher, The Journal of Psychology 110, 275-80, 1982] ont fait compléter un questionnaire (le *Eysenck Personality Questionnaire*] à 241 étudiants néo-zélandais. L'hypothèse (avancée antérieurement par des astrologues) que ces chercheurs se proposer de vérifier est que les personnes nées sous un signe positif (Bélier, Balance, Gémeaux, Lion, Verseau, Sagittaire) sont moins introverties que les personnes nées sous un signe négatif (Cancer, Capricorne, Poisson, Scorpion, Taureau, Vierge). Sur l'échelle introversion-extraversion du test, les extravertis ont un score élevé. L'échantillon était composé d'hommes et de femmes. Voici les moyennes, les écarts-types et le tailles des 4 groupes ainsi que la désignation des moyennes des populations :

		Hommes				Femmes			
		$\bar{y}$	S	n	μ	$\bar{y}$	S	n	μ
Signe du zodiac	Positif	13,50	4,38	38	μ_1	13,17	4,57	79	μ_3
	Négatif	15,52	4,21	38	μ_2	13,73	4,39	86	μ_4

Dans ce qui suit, considérer qu'il s'agit de quatre groupes issus de quatre populations de même variance σ^2.

a) Tester l'hypothèse que le degré d'introversion ne dépend ni du sexe ni du signe du zodiac.

b) Tester l'hypothèse que les hommes et les femmes ont la même moyenne, c'est-à-dire, $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$.

c) Tester l'hypothèse que les personnes nées sous un signe positif ont la même moyenne que ceux nés sous un signe négatif, c'est-à-dire, $\mu_1 + \mu_3 = \mu_2 + \mu_4$.

d) Tester l'hypothèse que la différence entre les positifs et les négatifs est la même chez les hommes et les femmes.

e) Tester chacune des hypothèses suivantes :
   i) Le degré d'introversion ne dépend pas du signe de Zodiac chez les hommes;
   ii) Le degré d'introversion ne dépend pas du signe de Zodiac chez les femmes;
   iii) Le degré d'introversion ne dépend pas du signe de Zodiac—ni chez les femmes ni chez les hommes, c'est-à-dire, l'hypothèse H_o : $\mu_1 = \mu_2$ *et* $\mu_3 = \mu_4$.

9.7 Dans une étude sur la sexualité des jeunes en Australie, un chercheur [Hong, Sung-Mook, The *Journal of Psychology* 115, 17-22 (1983)] a fait remplir un questionnaire à 560 étudiants d'université. Le questionnaire rempli permet de calculer un score qui indique dans quelle mesure l'attitude du répondant est permissive (un score élevé dénote une attitude permissive). L'objectif est de déterminer si le niveau de pratique religieuse affecte l'attitude concernant les comportements sexuels. Voici les moyennes, les écarts-types et les effectifs de trois sous-groupes.

Vont à l'église	$\bar{y}$	S	n	μ
Régulièrement	3,31	1,54	128	μ_1
De temps en temps	4,73	1,10	230	μ_2
Jamais	5,24	0,79	202	μ_3

a) Dresser une table d'analyse de variance. Expliquez votre conclusion. Estimer la variance σ^2.

b) Tester, dans le cadre du modèle en a) l'hypothèse que ceux qui ne vont jamais à l'église ont la même moyenne que ceux qui y vont, régulièrement ou de temps en temps, c'est-à-dire, tester l'hypothèse $\mu_3 = (\mu_1 + \mu_2)/2$.

c) Tester l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence entre ceux qui vont régulièrement à l'église et ceux qui y vont de temps en temps.

d) Tester l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence entre ceux qui vont à l'église de temps en temps et ceux qui n'y vont jamais.

e) Amalgamez les deux derniers groupes et testez l'hypothèse que ceux qui vont régulièrement à l'Église ont la même moyenne que les autres. Supposez une même variance σ^2 et estimez σ^2.

9.8 Lors d'un projet d'étude des problèmes de racisme dans une force policière, on prélève un échantillon de 32 policiers, dont 16 ont 11 ans de scolarité ou moins et 11 ont plus de 11 ans de scolarité. Chacun des deux groupes est divisé en deux sous-groupes de 8. L'un des deux sous-groupes suit un cours de sensibilisation aux cultures ethniques, l'autre pas. Le tableau suivant donne les résultats à un test d'hostilité aux groupes ethniques.

		Scolarité	
		≤ 11 ans	> 11 ans
Cours de sensibilisation	Suivi	60 58 56 54 52 50 48 46	36 36 33 32 30 29 26 26
	Pas suivi	50 48 46 44 42 40 38 36	30 28 26 24 22 20 28 26

a) Dresser une table d'analyse de variance. Estimer la variance σ^2.

b) Tester l'hypothèse que la moyenne de ceux qui ont suivi le cours est la même que celle de ceux qui ne l'ont pas suivi. Si on désigne les quatre moyennes des populations à l'aide de la notation matricielle usuelle, μ_{11}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{22}, l'hypothèse à tester est H_o : $\varphi = (\mu_{11} + \mu_{12})/2 - (\mu_{21} + \mu_{22})/2 = 0$.

c) Testez l'hypothèse que le cours a le même effet chez ceux de 11 ans de scolarité que chez ceux de plus de 11 ans de scolarité (l'« effet » du cours est mesuré par la différence des deux moyennes).

d) Supposons qu'on ait décidé plutôt de ne pas tenir compte des niveaux de scolarité. On aurait alors un modèle à deux groupes de taille 16—ceux qui ont suivi le cours et ceux qui ne l'ont pas suivi.

i) Tester dans ce modèle l'hypothèse que la moyenne la moyenne des deux groupes est la même.

ii) Expliquer pourquoi une différence qui était significative en b) ne l'est plus ici [comparer l'estimation de σ ici et en b)].

iii) Justifier les affirmations suivantes :

- Si, afin de constituer chacun des deux groupes, on avait délibérément choisi 8 personnes parmi ceux qui ont 11 ans et moins de scolarité et 8 parmi ceux qui en ont plus, alors le modèle décrit dans ce numéro n'est pas correct (dans le sens que les hypothèses du modèle ne sont nettement pas vérifiées).
- Si on avait laissé le choix des sujets au hasard (sans tenir compte de la scolarité), le modèle aurait été correct mais moins efficace (les tests auraient été moins puissant).

iv) Soit H_o l'hypothèse que le cours de sensibilisation est inutile et supposons que les sujets ont été choisis au hasard, sans tenir compte de la scolarité. Montrer que l'hypothèse de l'égalité des deux moyennes n'est pas l'hypothèse testée en b), à moins que *p*, la proportion de la population avec 11 ans de scolarité ou moins, soit égale à ½.

IAR (*Intelligence Achievement Responsibility*) avant et après une période de quatre mois et demi d'expéri-mentation avec l'un ou l'autre de deux langages informatiques : LOGO et Delta Drawing. Contrairement au LOGO, le langage Delta Drawing n'attache pas une grande importance à la décomposition d'un problème complexe ou à l'apprentissage par la correction des erreurs. Le test IAR mesure la propension du sujet à se sentir maître de ses apprentissages et de son succès intellectuel. Les chercheurs ont voulu montrer que l'exercice du langage LOGO augmente cette propension. Voici les résultats obtenus :

Tableau 9.3

Comparaison des langages Logo et Delta Drawing

LOGO			Delta		
Sexe	Score		Sexe	Score	
	Avant	Après		Avant	Après
F	16	29	F	15	21
F	20	24	M	18	22
M	21	23	F	21	21
M	22	21	F	21	19
M	22	26	F	22	20
F	23	30	F	22	20
F	24	26	F	23	23
F	24	23	F	23	30
F	25	32	M	26	21
M	27	34	M	27	25
M	28	29	M	30	27

Quelques statistiques :

Moyennes théoriques (Notation)

Sexe	DELTA	LOGO
F	μ_{11}	μ_{12}
M	μ_{21}	μ_{22}

Effectifs

Sexe	DELTA	LOGO
F	7	6
M	4	5

Moyennes

Sexe	DELTA	LOGO
F	1,0	5,333
M	-1,5	2,600

Sommes des carrés (Écarts par rapport à la moyenne)

Sexe	DELTA	LOGO
F	90	117,333
M	45	37,200

Écarts-types

Sexe	DELTA	LOGO
F	3,87298	4,84424
M	3,87298	3,04959

a) Soit Y la différence Après-Avant. Dresser une table d'analyse de variance considérant que l'échantillon est composé de quatre groupes : Filles*Delta (μ_{11}) ; Filles*Logo (μ_{12}) ; Garçons*Delta (μ_{21}) ; et Garçons*LOGO (μ_{22}).

b) Tester l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence entre LOGO et Delta.

c) Tester l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence entre filles et garçons.

d) Tester l'hypothèse que la différence entre les deux sexes est la même pour LOGO que pour Delta.

e) Tester l'hypothèse que la différence entre LOGO et Delta est la même pour les filles que pour les garçons.

f) Supposons que la distinction entre filles et garçons n'a simplement pas été retenue pour l'expérience. Dans ce modèle à deux groupes, tester l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence entre LOGO et Delta. Estimer la variance σ^2.

9.10 Voici les prix d'un échantillon de maisons vendues dans la région de Montréal, classées en six catégories, selon la taille (nombre de chambres à coucher) et le secteur :

Données brutes

Taille	Secteur		
	Centre	Nord	Sud
Petites (1 ou 2 chambres à coucher)	98 249 289 299	97 157 170 184 385 145	249 184 239 314 69 69 80 85 85 269 60 89 89 89 89 142 142
Moyennes (3 chambres à coucher	369 499 700 495 499 499	142 175 349 435 89 201 226 239 479	259 269 269 299 219 349 119 195 199 329 339 365 153 158 200
Grandes (4 chambres à coucher ou plus)	169 319 540	140 200 339 339 359 429 699 289 469 180 246 399 439 450 539 86 87 90	312 319 549 775 1385 142

Moyennes des populations et des échantillons :

Taille	Secteur		
	Centre	Nord	Sud
Petites (1 ou 2 chambres à coucher)	μ_{11} 233,7500 ($\bar{y}_{11}$)	μ_{12} 189,6667 ($\bar{y}_{12}$)	μ_{13} 137,8235 ($\bar{y}_{13}$)
Moyennes (3 chambres à coucher	μ_{21} 510,1667 ($\bar{y}_{21}$)	μ_{22} 259,4444 ($\bar{y}_{22}$)	μ_{23} 248,0667 ($\bar{y}_{23}$)
Grandes (4 chambres à coucher ou plus)	μ_{31} 342,6667 ($\bar{y}_{31}$)	μ_{32} 320,5556 ($\bar{y}_{32}$)	μ_{33} 580,3333 ($\bar{y}_{33}$)

Sommes des carrés : les sommes $\sum(y_i - \bar{y})^2$ dans chaque case

Taille	Secteur		
	Centre	Nord	Sud
Petites (1 ou 2 chambres à coucher)	25970,75	50223,33	106998,47
Moyennes (3 chambres à coucher	56568,83	141972,22	84456,93
Grandes (4 chambres à coucher ou plus)	69660,67	499990,94	1018799,33

a) Dresser une table d'analyse de variance (9 groupes).

b) Dans le modèle traité en a) tester les trois hypothèses suivantes en utilisant l'approche décrite à la section 9.6. La somme des carrés résiduelle dans le modèle est SCR = 2 052 775.

i) Le prix des maisons d'une ou deux chambres à coucher ne dépendent pas du secteur, en d'autres termes, l'hypothèse que les trois moyennes $\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{13}$ sont égales. Modifier le modèle de façon à supposer une même moyenne pour toutes les maisons d'une ou deux chambres à coucher, déterminer une analyse de variance dans ce modèle réduit, calculer la somme des carrés résiduelle SCR_o dans le modèle réduit, et utiliser la statistique 9.8.4. (SCR_o = 2 087 831).

ii) Les prix des maisons de trois chambres à coucher ne dépendent pas du secteur.

iii) Les prix des maisons de plus de trois chambres à coucher ne dépendent pas du secteur.

c) Utiliser les résultats en c) pour tester l'hypothèse qu'il n'y a pas de différence entre les secteurs dans les prix des maisons de même taille (en d'autres termes $\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{13}$ *et* $\mu_{21} = \mu_{22} = \mu_{23}$ *et* $\mu_{31} = \mu_{32} = \mu_{33}$ pour i = 1, 2 et 3).

d) Ignorer maintenant les tailles des maisons et déterminer une analyse de variance avec seul le Secteur comme facteur. Vous verrez que la valeur p est de 0,1115, et donc que vous pouvez difficilement conclure à une différence de prix entre les secteurs. Comment expliquer la contradiction avec les conclusions précédentes?

e) La distribution des tailles des maisons est donnée dans le tableau suivant :

	Centre	Nord	Sud
Petite	33%	19	24
Moyennes	42	25	53
Grandes	25	56	23
	100%	100%	100%

Tester chacune des hypothèses suivantes :

i) Le prix moyen des maisons du secteur centre est égal au prix moyen des maisons du secteur sud. [Notez bien que les moyennes en question doivent être pondérées. Par exemple, le prix moyen des maisons du centre est $0{,}33\mu_{11}+0{,}42\mu_{21}+0{,}25\mu_{31}$].

ii) Le prix moyen des maisons du secteur nord est égal au prix moyen est égal au prix moyen des maisons du secteur sud.

f) Résumer vos conclusions concernant les différences entre les secteurs.

9.11 Démontrez la décomposition SCT = SCE + SCR, soit

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i.})^2+\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y})^2$$

9.12 Démontrez la formule de calcul

$$\sum_{i=1}^{k}n_i(\bar{y}_{i.}-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{k}n_i\bar{y}_i^2-n\bar{y}^2.$$

9.13 Considérons le cas où $n_1 = n_2 = ... = n_k = m$, Montrez que SCE/$\sigma^2$: χ^2_{k-1} si H$_o$ est vraie. Sans supposer que H$_o$ est vraie, déterminez l'espérance de SCE. Montrez comment votre réponse justifie une région critique de la forme $F > \mathcal{F}_{k-1;k(m-1);\alpha}$.

9.14 Considérer l'exercice 9.10-b-i). L'hypothèse à tester est H$_o$: $\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{13}$.

a) Vérifier numériquement que SCR$_o$ – SCR peut être calculé par la formule $\sum_{j=1}^{3}(\bar{y}_{1j}-\bar{y}_1)^2$ où

$\bar{y}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{3}n_{1j}\bar{y}_{1j}$ et $n_1 = n_{11} + n_{12} + n_{13}$.

b) Montrer que $E\left(\sum_{j=1}^{3}(\bar{y}_{1j}-\bar{y}_1)^2\right) = (3-1)\sigma^2+\sum_{j=1}^{3}n_{1j}(\mu_{1j}-\bar{\mu})^2$, où $\bar{\mu}=\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{3}n_{1j}$ et donc que

$$E\left(\frac{\sum_{j=1}^{3}(\bar{y}_{1j}-\bar{y}_1)^2}{3-1}\right)=\sigma^2+\frac{\sum_{j=1}^{3}n_{1j}(\mu_{1j}-\bar{\mu})^2}{3-1}.$$

c) Justifier l'utilisation de la statistique F à l'aide de cette forme d'écriture (c'est-à-dire, montrer que si H$_o$ est fausse, la statistique F tend à prendre une valeur élevée).

d) Si la population est normale, le numérateur et le dénominateur soient indépendants de la statistique F sont indépendants. Justifier cette affirmation (cette condition est nécessaire pour que F suive une loi de Fisher).

9.15 [*Données du tableau* A09] Faites une analyse de variance pour comparer les trois méthodes d'enseignement

a) En vous basant sur les scores A1 et B1.

i) Commencez pas vérifier qu'il n'y a pas de différence par rapport à A1.

ii) Maintenant faites une analyse basée sur les différences B1 – A1.

b) En vous basant sur les scores A2 et B2.

i) Commencez pas vérifier qu'il n'y a pas de différence par rapport à A2.

ii) Maintenant faites une analyse basée sur les différences B1 – A1

c) En vous basant B3,

Id	T	A1	A2	B1	B2	B3	Id	T	A1	A2	B1	B2	B3
1	1	4	3	5	4	41	34	2	6	2	7	0	55
2	1	6	5	9	5	41	35	2	8	4	10	6	57
3	1	9	4	5	3	43	36	2	9	6	8	6	53
4	1	12	6	8	5	46	37	2	9	4	8	7	37
5	1	16	5	10	9	46	38	2	8	4	10	11	50
6	1	15	13	9	8	45	39	2	9	5	12	6	54
7	1	14	8	12	5	45	40	2	13	6	10	6	41
8	1	12	7	5	5	32	41	2	10	2	11	6	49
9	1	12	3	8	7	33	42	2	8	6	7	8	47
10	1	8	8	7	7	39	43	2	8	5	8	8	49
11	1	13	7	12	4	42	44	2	10	6	12	6	49
12	1	9	2	4	4	45	45	3	11	7	11	12	53
13	1	12	5	4	6	39	46	3	7	6	4	8	47
14	1	12	2	8	8	44	47	3	4	6	4	10	41
15	1	12	2	6	4	36	48	3	7	2	4	4	49
16	1	10	10	9	10	49	49	3	7	6	3	9	43
17	1	8	5	3	3	40	50	3	6	5	8	5	45
18	1	12	5	5	5	35	51	3	11	5	12	8	50
19	1	11	3	4	5	36	52	3	14	6	14	12	48
20	1	8	4	2	3	40	53	3	13	6	12	11	49
21	1	7	3	5	4	54	54	3	9	5	7	11	42
22	1	9	6	7	8	32	55	3	12	3	5	10	38
23	2	7	2	7	6	31	56	3	13	9	9	9	42
24	2	7	6	5	6	40	57	3	4	6	1	10	34
25	2	12	4	13	3	48	58	3	13	8	13	1	48
26	2	10	1	5	7	30	59	3	6	4	7	9	51
27	2	16	8	14	7	42	60	3	12	3	5	13	33
28	2	15	7	14	6	48	61	3	6	6	7	9	44
29	2	9	6	10	9	49	62	3	11	4	11	7	48
30	2	8	7	13	5	53	63	3	14	4	15	7	49
31	2	13	7	12	7	48	64	3	8	2	9	5	33
32	2	12	8	11	6	43	65	3	5	3	6	8	45
33	2	7	6	8	5	55	66	3	8	3	4	6	42

>