

### MAT7381 Solutions # 6.43

Lors d'une étude sur le « concept de soi » des adolescents nigériens, un chercheur [Jegede, R. Olukayode, *The Journal of Psychology* 110, 249-261 (1982)] a administré le test *Piers-Harris Self-Concept Scale* à 1300 élèves de niveau secondaire à Ibadan.

$\sigma^2$  est estimée par  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)S_i^2}{n - k}$ ,  $k$  = le nombre de groupes ici et  $n = \sum n_i$ . La statistique pour tester une hypothèse de la forme  $\ell' \mu = 0$  est  $T = \frac{\sum_{i=1}^k \ell_i \bar{y}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{\ell_i^2 / n_i}}$ . Sous l'hypothèse,  $T$  est de loi de Student à  $n-k$  degrés de liberté.

Lorsque  $\ell = \mathbf{L}$  est une matrice, la statistique de test est  $F = \hat{\mu}' \mathbf{L} [\mathbf{L}' \mathbf{V} \mathbf{L}]^{-1} \mathbf{L}' \hat{\mu} / 2$ , une statistique qui suit, sous l'hypothèse, une loi  $F$  à  $r$  et  $n-k$  degrés de liberté, où  $r$  est le nombre d'hypothèses testées, c'est-à-dire, le nombre de colonnes de  $\mathbf{L}$ . On présente les calculs ci-dessous. Vous interprétez les résultats.

- a) Le score moyen a été de 58,19 avec un écart-type de 10,06. Dans une étude faite antérieurement auprès de 1183 adolescents américains on avait trouvé une moyenne de 51,84 avec un écart-type de 13,87. La différence entre les Nigériens et les Américains est-elle significative ? Supposez que la variance  $\sigma^2$  des deux groupes est la même et estimez  $\sigma^2$ .

Pour l'instant, nous ne disposons que de deux échantillons, et c'est donc à partir de ces deux que nous obtenons une estimation commune de la variance, soit  $\hat{\sigma}^2 = 144,6405$ ;  $\ell' = [1, -1]$ ;  $\sum \ell_i \bar{y}_i = 6.35$ ; Variance de  $\sum \ell_i \bar{y}_i = 0.2335277$ ;  $T = 13.14028$ ; Valeur  $p \approx 0$ .

- b) L'échantillon de Jegede était composé de 552 filles et 828 garçons. Les filles avaient une moyenne de 56,82 avec un écart-type de 9,96; et les garçons une moyenne de 59,11 avec un écart-type de 10,01. La différence entre les garçons et les filles est-elle significative ? Supposez que la variance  $\sigma^2$  des deux groupes est la même et estimez  $\sigma^2$ .

Ici aussi, nous ne disposons que de deux échantillons, et c'est donc à partir de ces deux que nous obtenons une estimation commune de la variance, soit  $\hat{\sigma}^2 = 99.801$ ;  $\ell' = [1 -1]$ ;  $\sum \ell_i \bar{y}_i = -2.29$ ; Variance de  $\sum \ell_i \bar{y}_i = 0.3013$ ;  $T = 4.172$ ; Valeur  $p = 3.212e-05$ . Le fait que la variance estimée est ici inférieure à ce qu'elle était au numéro précédent est dû au fait qu'au numéro précédent, la dispersion interne aux Nigériens reflétait les différences entre filles et garçons, apparemment deux populations de moyennes différentes. Si c'est le cas, la quantité  $\hat{\sigma}^2 = 144,6405$  calculée au dernier numéro surestime la variance.

- c) Maintenant traitez simultanément les trois groupes : filles nigérianes, garçons nigériens, et Américains. Testez l'hypothèse que les moyennes de trois groupes ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$ , respectivement) sont égales. Supposez que la variance  $\sigma^2$  des trois groupes est la même et estimez  $\sigma^2$ . Il est fort probable qu'elle surestime  $\sigma^2$ , étant donné qu'elle a comme composante la variance des Américains, qui regroupe filles et garçons.

La variance est maintenant estimée  $\hat{\sigma}^2 = 142.5449$ . Il est à première vue surprenant qu'elle soit aussi élevée.

$$\mathbf{L} = \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$$(\mathbf{L}' \bar{\mathbf{y}})' = [-2.29 \quad 4.98]$$

$$\text{Variance de } \mathbf{L}' \bar{\mathbf{y}} = \begin{matrix} 0.4303893 & 0.2582336 \\ 0.2582336 & 0.3787281 \end{matrix}$$

$$F = 96.2967; \text{ Valeur } p \approx 0$$

- d) Dans le cadre du modèle en c) testez l'hypothèse que les filles et les garçons nigériens ont la même moyenne.

$$\hat{\sigma}^2 = 144,6405; \ell' = [1 \ -1 \ 0]; \sum \ell_i \bar{y}_i = -2.29; \text{ Variance de } \sum \ell_i \bar{y}_i = 0.4304; T = 3.49; \text{ Valeur } p = 0.00049$$

e) Dans le cadre du modèle en c) testez l'hypothèse que la moyenne des Américains est égale à la moyenne des Nigériens en supposant qu'il y a autant de filles que de garçons au Nigéria (en d'autres termes, vous devez tester l'hypothèse que  $\mu_3 = (\mu_1 + \mu_2)/2$ .)

$\ell' = [1 \ -1/2 \ -1/2]$  ;  $\Sigma \ell_i \bar{y}_i = 1.345$  ; Variance de  $\Sigma \ell_i \bar{y}_i = 0.3313961$  ;  $T = 2.336407$  ; Valeur  $p = 0.01954680$