MAT 7381 Solution 6.28

Dans un modèle à deux facteurs et r observations par cellule, les sommes de carrés habituelles sont toutes indépendantes les unes des autres.

On a par ailleurs les esperances suivantes :

$$E(MCA) = \sigma^2 + br\sum_{i=1}^{a}(\mu_{i\cdot}-\bar{\mu})^2/(a-1) \qquad (a-1 \text{ dl})$$

$$E(MCB) = \sigma^2 + ar\sum_{j=1}^{b}(\mu_{\cdot j}-\bar{\mu})^2/(b-1) \qquad (b-1 \text{ dl})$$

$$E(MCAB) = \sigma^2 + r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\mu_{ij}-\mu_{i\cdot}-\mu_{\cdot j}+\bar{\mu})^2/[(a-1)(b-1)] \qquad (a-1)(b-1) \text{ dl}$$

$$E(MCR) = \sigma^2 \qquad ab(r-1) \text{ dl}$$

MCR est donc un estimateur sans biais de σ^2.

Mais si les interactions sont nulles, $\mu_{ij}-\mu_{i\cdot}-\mu_{\cdot j}+\bar{\mu}=0$ $\forall\, i,j$, alors $E(MCAB)=\sigma^2$ et MCAB est donc un deuxième estimateur sans biais de σ^2. Le meilleur estimateur de σ^2 parmi toutes les combinaisons linéaires de MCAB et MCR est
$$\frac{(a-1)(b-1)MCAB + ab(r-1)MCR}{(a-1)(b-1)+ab(r-1)}$$
$$= \frac{SCR + SCAB}{(a-1)(b-1)+ab(r-1)} = MCRAB \text{ (disons)}.$$
H_A et H_B seront alors testées par $\frac{MCA}{MCRAB}$ et $\frac{MCB}{MCRAB}$ qui suivent, respectivement une loi F à $(a-1)$ et ν degrés de liberté ; et F à $(b-1)$ et ν degrés de liberté, $\nu = (a-1)(b-1)+ab(r-1)$.