MAT 7381

Solutions de quelques numéros

2.23 a) $\begin{pmatrix}\bar u\\ \bar v\end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix}\bar\mu\\ \bar\mu+\delta\end{pmatrix}; \frac{1}{n}\Sigma\right]$, $\bar\mu = \frac{1}{n}\sum \mu_i$, $\Sigma = \sigma^2[(1-\rho)I + \rho e e']$

$\bar v - \bar u \sim N[\delta; 2(1-\rho)\sigma^2/n] \Rightarrow \frac{(\bar v - \bar u)}{\sqrt{2(1-\rho)\sigma^2/n}} \sim N(0;1) \Rightarrow$

$\frac{n(\bar v - \bar u)^2}{2(1-\rho)\sigma^2} \sim \chi^2_1(\lambda)$, $\lambda = \frac{n\delta^2}{2(1-\rho)\sigma^2}$. $\lambda = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$

b) $m_i \sim N(\mu_i + \delta/2; \sigma^2(1+\rho)/2)$. Donc $\underset{\sim}{m}' = [m_1; \dots; m_n]$ est

de loi $N_n\left[\frac{\delta}{2}\underset{\sim}{e} + \underset{\sim}{v}; \frac{\sigma^2(1+\rho)}{2} I\right]$, $\underset{\sim}{v}' = [\mu_1, \dots, \mu_n]$.

$Q_2 = \frac{m'Cm}{\sigma^2(1+\rho)/2} \sim \chi^2_{n-1}$ car $\frac{C}{\sigma^2(1+\rho)/2} \mathrm{Var}(\underset{\sim}{m}) \frac{C}{\sigma^2(1+\rho)/2} = \frac{C}{\sigma^2(1+\rho)/2}$

$\lambda = \frac{(\frac{\delta}{2}\underset{\sim}{e} + \underset{\sim}{v})' C (\frac{\delta}{2}\underset{\sim}{e} + \underset{\sim}{v})}{\sigma^2(1+\rho)/2} = \frac{\underset{\sim}{v}' C \underset{\sim}{v}}{\sigma^2(1+\rho)/2}$. $\lambda = 0 \Leftrightarrow C\underset{\sim}{v} = 0$

c.à.d. si les μ_i sont égaux

c) $d_i \sim N(\delta; 2(1-\rho)\sigma^2) \Rightarrow z_i = \frac{d_i}{\sqrt{2(1-\rho)\sigma^2}} \sim N(\delta^*; 1) \Rightarrow \underset{\sim}{z} = [z_1, \dots, z_n]'$

$\sim N(\delta^* \underset{\sim}{e}, I)$, où $\delta^* = \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\rho)\sigma^2}}$. Donc $Q_3 = z'Cz \sim \chi^2_{n-1}$

$\lambda = \delta^{*2} \underset{\sim}{e}' C \underset{\sim}{e} = 0$.

3.3 a) Puisque $\hat\beta \sim N(\beta; \sigma^2(X'X)^{-1})$, $L_1'\hat\beta$ et $L_2'\hat\beta$ sont indépendants ssi $L_1'(X'X)^{-1}L_2 = 0$.

b) Posons $\omega = (X'X)^{-1/2}X'y$. Les deux formes quadratiques sont $\omega' A_1 \omega$ et $\omega' A_2 \omega$ où $A_i = (X'X)^{-1/2} L_i [L_i'(X'X)^{-1}L_i]^{-1} L_i'(X'X)^{-1/2}$. A_1 et A_2 sont idempotentes et symétriques; $r(A_i) = \mathrm{tr}\, A_i = r(L_i)$.
$r(L_1 | L_2) = r(L_1) + r(L_2)$ car $\mathcal{C}(L_1) \cap \mathcal{C}(L_2) = \{0\}$ (vérifier). Donc $r[A_1] + r(A_2) = r(X) = q$. Par ailleurs $A_1 A_2 = 0$. Donc $A_1 + A_2 = I_q$.
Donc $\omega' A_1 \omega + \omega' A_2 \omega = \omega'(A_1 + A_2)\omega = \omega'\omega = y'X(X'X)^{-1}X'y$.