MAT7381 Exercices
Chapitre 1– Matrices

Les numéros 1.1 à 1.3 sont essentiellement calculatoires et visent à vous familiariser avec les commandes R qui vous permettent d'effectuer diverses opérations matricielles. Ensuite viennent les exercices qui vous proposent de démontrer certaines propositions — des propositions utiles à connaître, en particulier celles en rouge. À vous de décider si vous vous donnerez la peine de les démontrer ou non.

1.1 Définir en R la matrice 8×3 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 39 & 49 & 60 \\ 60 & 14 & 30 \\ 51 & 66 & 42 \\ 59 & 51 & 50 \\ 67 & 58 & 52 \\ 35 & 38 & 47 \\ 51 & 26 & 55 \\ 55 & 41 & 43 \end{bmatrix}$.

```
> a<-c(39,60,51,59,67,35,51,55,49,14,66,51,58,38,26,41,60,30,42,50,52,47,55,43)
> X<-matrix(a,8,)
```

a) Calculer le produit **A** = **X'X**

```
> A<-t(X)%*%X
```

b) Calculer **B** = $\mathbf{A}^{-1}$

```
> B<-solve(A)
```

c) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de **A**, et vérifier que le déterminant |A| est égal au produit des valeurs propres.

```
> eigen(A)
```

(Les valeurs propres sont données par `> eigen(A)$values` et les vecteurs propres par `> eigen(A)$vectors`. Le déterminant de A est donné par `>det(A)`)

d) Vérifier numériquement que les valeurs propres de $\mathbf{A}^{-1}$ sont les réciproques de celles de A.

e) Déterminer **P** et **D** dans la décomposition **X'X** = **PDP'** où **P** est une matrice de colonnes orthonormales et **D** est diagonale et vérifier que **X'X** est bien égal à **PDP'**.

```
> P<-eigen(A)$vectors
> D<-diag(eigen(A)$values)
```

f) Déterminer **Q** et **R** dans la décomposition **XX'** = **QRQ'** où **Q** est une matrice de 3 colonnes orthonormales et **R** est une matrice diagonale 3×3.

g) Calculer la matrice **P** = $\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X}$

```
> P<-X%*%B%*%t(X)
```

h) Vérifier que P est idempotente (vous calculerez P^2 puis arrondirez à une douzaine de décimales)

```
> round(P%*%P-P,12)
```

i) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de **P**. (On connaît la réponse : 3 des valeurs propres sont égales à 1, et autres sont nulles)

j) Définissez la matrice **E** constituée des vecteurs propres correspondant aux valeurs propres non nulles et vérifiez que **P** = **EE'**.

```
> E<-eigen(P)$vectors[,1:3]
> round(E%*%t(E)-P,12)
```

k) Vérifier que les colonnes de E sont orthonormales.

```
> round(t(E)%*%E,12)
```

l) Les colonnes de **E** constituent une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbf{P})$. Déterminer une matrice F dont les colonnes engendrent le noyau de **P** $\mathcal{N}(\mathbf{P})$, de sorte que la matrice [**E** | **F**] engendre $\mathbb{R}^8$. Vérifiez que les colonnes de **E** sont orthogonales à celles de **F**:

```
> F<-eigen(diag(8)-E%*%t(E))$vectors[,1:5]
```

m) Tout vecteur $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbb{R}^8$ peut donc s'exprimer comme une somme $\boldsymbol{x} = \mathrm{E}\boldsymbol{x}_1 + \mathrm{F}\boldsymbol{x}_2$. Considérer le vecteur $\boldsymbol{x}'$ = [5 ; 8 ; 2 ; 5 ; 9 ; 5 ; 7 ; 1]. Identifiez $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ et déterminer la projection de $\boldsymbol{x}$ sur $\mathcal{C}(\mathbf{P})$ et sur $\mathcal{N}(\mathbf{P})$ [Noter que $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{E}'\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{F}'\boldsymbol{x}$**].**

n) Voici un petit programme (appelé ici `projection`) permettant de projeter un vecteur $\boldsymbol{x}$ sur les espaces $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ et sur $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. La commande

```
> fix(projection)
```

permet d'ouvrir une fenêtre dans laquelle on écrit le programme suivant :

```
function (x,A)
{y<-A%*%solve(t(A)%*%A)%*%t(A)%*%x
z<-x-y
list(y=y,z=z)
}
```

`y` est alors la projection de `x` sur $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ et `z` la projection de `x` sur $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.

Voici une autre façon de déterminer une nouvelle base pour l'espace engendré par les colonnes de **X.** La base étant de dimension 3, définissons une matrice 8×3 **Y** dont les colonnes constitueront les vecteurs de la base recherchée :

```
> Y<-matrix(0,8,3)
```

Le premier vecteur, $\boldsymbol{y}_1$, de la nouvelle base est simplement $\boldsymbol{x}_1$, la première colonne de X. Le deuxième vecteur est la projection orthogonale de $\boldsymbol{x}_2$ sur $\mathcal{N}(\boldsymbol{y}_1)$; le troisième vecteur est la projection orthogonale de $\boldsymbol{x}_3$ sur $\mathcal{N}([\boldsymbol{y}_1 ; \boldsymbol{y}_2])$; le quatrième vecteur est la projection orthogonale de $\boldsymbol{x}_4$ sur $\mathcal{N}([\boldsymbol{y}_1 \mid \boldsymbol{y}_2 \mid \boldsymbol{y}_3])$; ainsi de suite.

```
> Y[,1]<-X[,1]
> Y[,2]<-projection(X[,2],Y[,1])$z
> Y[,3]<-projection(X[,3],Y[,1:2])$z
```

Justifier la procédure décrite ci-dessus : montrer que $\mathcal{C}(\mathrm{Y}) = \mathcal{C}(\mathbf{X})$, et que les colonnes de **Y** sont orthogonales. Vérifier numériquement.

1.2 a) Montrez que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ sont $1\pm\rho$

b) Déterminez les vecteurs propres normalisés de **A** et vérifiez qu'ils sont orthogonaux

c) Quelles conditions ρ doit satisfaire pour que A soit définie positive?

Vous pouvez si cela vous amuse vérifier vos réponses avec R ou avec Maple. Commandes Maple :

```
> array([[1,rho],[rho,1]]);
> with(linalg);
> eigenvalues(A,'implicit');
> eigenvectors(A);
```

1.3 a) Soit **A** une matrice symétrique, et supposons que $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ sont deux vecteurs propres correspondant à une même valeur propre $\lambda \neq 0$. Soit $\mathbf{X} = (\boldsymbol{x}_1 ; \boldsymbol{x}_2)$. Montrez que tout vecteur $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{C}(X)$ est une vecteur propre de **A** correspondant à λ.

b) Considérez la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$. Vérifiez que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1+2\rho$, de multiplicité 1 et $\lambda_2 = 1-\rho$ de multiplicité 2 [Il suffira de montrer que le polynôme $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|$ peut s'écrire comme $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2$].

c) Vérifiez que $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre correspondant à λ_1; et que $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres correspondant à λ_2.

d) Vous constaterez que $\boldsymbol{v}_1$ est orthogonal à $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$, mais que $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ ne sont pas orthogonaux entre eux. Déterminez un autre vecteur propre $\boldsymbol{v}_4$ correspondant à λ_2 tel que $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_4$ soient une base orthogonale à l'espace engendré par $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$.

1.4 Soit **D** une matrice diagonale où chaque élément de la diagonale est strictement positif. Montrez que **D** est définie positive. Montrez, à l'aide d'un contre-exemple, que cet énoncé n'est pas vrai si **D** n'est pas diagonale [Considérez, par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$].

1.5 Soit $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$, vérifiez que **P** est idempotente. Il existe deux espaces $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tels que $\mathbf{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ pour tour $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{P}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$. Identifiez les deux espaces (par exemple, trouvez une base de $\mathcal{A}$ et une base de $\mathcal{B}$).

1.6 Soit $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ deux vecteurs linéairement indépendants qui engendrent un certain espace $\mathcal{A}$. Montrez que les vecteurs $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{y}_2$ sont une base orthogonale de $\mathcal{A}$, où $\boldsymbol{y}_2 = (\mathbf{I}-\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1)^{-1}\boldsymbol{x}_1')\boldsymbol{x}_2$. Quel est l'effet de la matrice $\mathbf{I}-\boldsymbol{x}_1(\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1)^{-1}\boldsymbol{x}_1'$?

1.7 Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que les valeurs propres sont –1 et 3; déterminer deux vecteurs propres normalisés correspondants; puis réécrire **A** sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{P}'$, où Δ est diagonale et **P** est orthogonale.

1.8 Soit **A** une matrice réelle symétrique et **P** une matrice orthogonale. Montrez que **A** est semi-définie positive si et seulement si $\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}$ est semi-définie positive.

1.9 Soit **A** une matrice réelle symétrique de rang 1.

a) Montrez que $\mathbf{A} = k\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'$, pour un certain vecteur $\boldsymbol{b}$ et un certain scalaire k (vous pouvez vous servir de la proposition 1.6).

b) Montrez que soit **A**, soit -**A** est semi-définie positive.

1.10 Soit **X** une matrice de plein rang; montrez que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est non-singulière et que $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}$ est symétrique et idempotente.

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^q$ tels que $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \{\mathbf{0}\}$ et $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B} = \mathbb{R}^q$. Tout vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$ peut alors être exprimé de façon unique comme une somme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ et $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$. Une transformation (matrice) **A** est appelée *projection sur $\mathcal{A}$ le long de $\mathcal{B}$* si et seulement si $\mathbf{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\ \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{A}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}\ \forall\ \boldsymbol{b} \in \mathcal{B}$. [Donc $\mathbf{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{a}\ \forall\ \mathbf{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^q$]. La projection est dite *orthogonale* si et seulement si $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp}$. Une projection orthogonale sera désignée par $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ [ou $\mathcal{P}_{\mathbf{X}}$ si **X** est une matrice telle que $\mathcal{C}(\mathbf{X}) = \mathcal{A}$].

1.11 Soit **A** une matrice $q \times q$, et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^q$ tels que $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \{\mathbf{0}\}$ et $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B} = \mathbb{R}^q$.

a) Montrez que si **A** est une projection sur $\mathcal{A}$ le long de $\mathcal{B}$, alors **A** est idempotente $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathbf{A})$ et $\mathcal{B} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

b) Montrer que **A** est symétrique si et seulement si $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\perp}$. [Il pourrait être utile de noter que le noyau d'une matrice idempotente **A** est engendré par les colonnes de **I**-**A**.]

1.12 Si $\mathbf{X}$ est une matrice de rang plein, montrez que $\mathbf{X'X}$ est non singulière et que la projection orthogonale sur $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ est donnée par $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}$ [Montrez que $\mathbf{P}$ est symétrique et idempotente, puis que $\mathcal{C}(\mathbf{P}) = \mathcal{C}(\mathbf{X})$]. Montrez aussi que la projection orthogonale sur $\mathcal{N}(\mathbf{X'})$ est donnée par $\mathbf{I} - \mathbf{P}$.

1.13 Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^q$ tels que $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \{\mathbf{0}\}$ et $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B} = \mathbb{R}^q$. Montrez qu'un projecteur sur $\mathcal{A}$ le long de $\mathcal{B}$ est unique, c'est-à-dire, que si $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont deux projecteurs sur $\mathcal{A}$ le long de $\mathcal{B}$, alors $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$. Vérifiez que si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont deux matrices de rang plein telles que $\mathcal{C}(\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{Y})$, alors $\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'} = \mathbf{Y}(\mathbf{Y'Y})^{-1}\mathbf{Y'}$.

1.14 Soit $\mathbf{C} = [\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]$ et $\mathbf{D} = [\mathbf{X} \mid (\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{Y}]$ deux matrices partitionnées, où $\mathbf{P} = \mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}$ et $\mathbf{X}$ est de plein rang plein. Montrez que $\mathcal{C}(\mathbf{C}) = \mathcal{C}(\mathbf{D})$. Donnez une interprétation géométrique de ce résultat.

1.15 Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices idempotentes telles que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{0}$. Montrez que $\mathcal{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathcal{C}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}])$. [*Suggestion*: montrez que $\mathcal{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subseteq \mathcal{C}([\mathbf{A} \mid \mathbf{B}])$ et puis que les deux espaces sont de même dimension. Utilisez aussi le fait que $r[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}] = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - dim\{\mathcal{C}(\mathbf{A}) \cap \mathcal{C}(\mathbf{B})\}$].

1.16 Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices symétriques et idempotentes telles que $\mathcal{C}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A})$. Montrer que $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ est idempotente. Soit $\mathbf{X}_1$ une matrice $n \times q_1$ de rang q_1 et $\mathbf{X}_2$ une matrice $n \times q_2$ de rang q_2. Supposons que $\mathcal{C}(\mathbf{X}_2) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{X}_1)$. Montrez que $\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1' - \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'$ est idempotente.

1.17 Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices idempotentes et symétriques. Supposons que $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ et que $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$. Montrez que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

1.18 Soit $\mathbf{L}$ une matrice de plein rang. Montrez que si $\mathbf{L}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, alors il existe $\boldsymbol{z}$ tel que $\boldsymbol{x} = [\mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}']\boldsymbol{z}$.

1.19 Soit $\boldsymbol{c}$ un vecteur constant et $\mathbf{L}$ une matrice de rang plein. Montrez que toutes les solutions $\boldsymbol{x}$ de l'équation $\mathbf{L}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{x} = \mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{L})^{-1}\boldsymbol{c} + [\mathbf{I} - \mathbf{L}(\mathbf{L}'\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}']\boldsymbol{z}$, où $\boldsymbol{z}$ est un vecteur arbitraire.

1.20 Soit $\mathbf{I}_n$ l'identité d'ordre n, $\boldsymbol{e}_n$ un vecteur de n « 1 » et $\mathbf{J}_n = \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_n'$ une matrice $n\times n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

a) Montrer que les valeurs propres de $\mathbf{J}_n$ sont n (de multiplicité 1) et 0 (de multiplicité n-1). Identifiez les vecteurs propres correspondants.

b) Montrer que $\mathbf{I}_n - k\mathbf{J}_n$ est inversible à moins que $k = 1/n$. Déterminer l'inverse $(\mathbf{I}_n - k\mathbf{J}_n)^{-1}$, $k \neq 1/n$. [Essayez une matrice de la forme $\mathbf{I}+m\boldsymbol{ee}'$].

1.21 Soit $\mathbf{A}$ une matrice non singulière et $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs colonnes. Vérifiez que $(\mathbf{A}+\boldsymbol{uv}')^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \dfrac{\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{uv}'\mathbf{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{v}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{u}}$.

1.22 Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique.

a) Montrer que si $\mathbf{A}$ est définie positive, alors $\lambda_1 \leq \boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \lambda_q$, pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = 1$, où λ_1 est la plus petite valeur propre de A et λ_q est sa plus grande valeur propre.

b) Sans supposer que $\mathbf{A}$ est définie positive, montrer que $(\boldsymbol{x}'\mathbf{A}x)^2 \leq \lambda$, pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = 1$, où λ est la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}'\mathbf{A}$.

1.23 Soit $\mathbf{A}$ Montrer que si $\mathbf{A}$ est définie positive et $\mathbf{B}$ est une matrice symétrique, alors $\mathbf{A}$-$s\mathbf{B}$ est définie positive pour $|s|$ assez petit.

1.24 Soit $\mathbf{A}$ une matrice définie positive, $\boldsymbol{b}$ un vecteur fixe. Montrez que $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{b})^2 \leq (\boldsymbol{x}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b}'\mathbf{A}\boldsymbol{b})$ [*Suggestion* : Puisque $\mathbf{A}$ est définie positive, il existe une « racine carrée » $\mathbf{A}^{-½}$, et donc $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}'\mathbf{A}^{-½}\mathbf{A}^{½}\boldsymbol{b}$. Utiliser ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v})^2 \leq (\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v})$].

1.25 Soit $\mathbf{A}$ une matrice définie positive, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ ses valeurs propres.

a) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = 1$, $1/\lambda_n \leq \boldsymbol{x}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x} \leq \Sigma(1/\lambda_i) \leq n/\lambda_1$.

b) Montrer que pour tout $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{x}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x} = 1$, $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2 \leq \boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x}$, et que $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2 = \boldsymbol{x}'\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ si et seulement si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$.

c) Montrer que le maximum de $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2$ sur tous les $\boldsymbol{x}$ tels que $\boldsymbol{x}'\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{x} = 1$ est atteint lorsque $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre de $\mathbf{A}$.

1.26 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$ une matrice définie positive.

a) Montrer que $\mathbf{A}_{11}$ est définie positive.

b) Montrer que $\mathbf{A}_{11.2} = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}$ est définie positive. [*Voir le théorème* 1.5.2]

c) Soit $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$. Montrer que $\mathbf{B}_{11} - \mathbf{A}_{11}^{-1}$ est définie positive.

1.27 Soit $\mathbf{A}$ une matrice idempotente symétrique. Montrez que chaque élément de la diagonale est inférieur ou égal à 1.[Voir le #1.22]

1.28 Soit $\mathbf{C}$ une matrice semi définie positive. Montrer que si λ est une valeur propre de $\mathbf{C}$, alors $\lambda/(1+\lambda)$ est une valeur propre de $(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}$. Montrer ensuite que si $\mathbf{A}$ est définie positive, $\mathbf{B}$ semi-définie positive, et λ est une valeur propre de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, alors $\lambda/(1+\lambda)$ est une valeur propre de $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$.