MAT7381 Devoir 3

3.13 Un importateur reçoit des oranges de 5 pays différents, A, B, C, D, et E. Pour estimer les poids moyens μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 et μ_5 de ces pays, on procède de la façon suivante : On place en même temps 3 oranges, provenant de trois pays différents, et on note le poids total. On effectue 10 pesées (toutes les combinaisons possibles de 3 oranges). Voici les résultats :

Poids total	Pays
$y_1 = 552$	A ; B ; C
$y_2 = 560$	A ; B ; D
$y_3 = 592$	A ; B ; E
$y_4 = 564$	A ; C ; D
$y_5 = 575$	A ; C ; E
$y_6 = 575$	A ; D ; E
$y_7 = 571$	B ; C ; D
$y_8 = 587$	B ; C ; E
$y_9 = 589$	B ; D ; E
$y_{10} = 601$	C ; D ; E

Les poids des oranges sont de loi normale, de variance σ^2 dans chaque population. L'observation y_1 dans le tableau ci-dessus, par exemple, est une somme de trois variables aléatoires, $y_1 = z_1 + z_2 + z_3$, de moyennes μ_1, μ_2 et μ_3, respectivement, et $\text{Var}(z_1) = \text{Var}(z_2) = \text{Var}(z_3) = \sigma^2$ ($\Rightarrow \text{Var}(y_1) = 3\sigma^2$.)

a) Estimer le vecteur des moyennes $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1 ; \mu_2 ; \mu_3 ; \mu_4 ; \mu_5]$.

b) Estimer la matrice de covariance de l'estimateur $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ de $\boldsymbol{\mu}$.

c) Estimer le vecteur des contrastes $[\mu_2\text{-}\mu_1 ; \mu_3\text{-}\mu_2 ; \mu_4\text{-}\mu_3 ; \mu_5\text{-}\mu_4]$ et déterminer la matrice de covariance de son estimateur.

d) Déterminer un intervalle de confiance à 95 % pour $\mu_3\text{-}\mu_2$.

e) Tester l'hypothèse que $\mu_1 = \mu_2$.

f) Tester l'hypothèse que les 5 moyennes sont égales.

g) On aura pesé en tout 30 oranges en 10 pesées. Est-ce qu'on aurait mieux fait de peser deux fois 3 oranges d'un même pays simultanément, c'est-à-dire,

- une pesée de 3 oranges de A dans la balance, puis une pesée de 3 oranges de B,…, finalement une pesée de 3 oranges de E (5 pesées, 15 oranges);
- et on recommence une deuxième fois (encore 5 pesées, encore 3 oranges).

Préciser vos critères, calculez, puis discuter.

3.14 Considérer le modèle $\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ avec $\mathbf{X}_{n\times q} = (\boldsymbol{x}_1 \mid \mathbf{X}_2)$ où $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}$. Soit $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2\end{bmatrix}$ l'estimateur habituel de $\boldsymbol{\beta}$. Montrez que $\text{Var}(\hat{\beta}_1) \geq \dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1}$; et que le minimum est atteint lorsque les colonnes de $\mathbf{X}_2$ sont orthogonales à $\boldsymbol{x}_1$.

3.15 Considérer le modèle $\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ avec $\mathbf{X}_{n\times q} = (\boldsymbol{x}_o \mid \boldsymbol{x}_1 \mid \mathbf{X}_2)$ où $\boldsymbol{x}_o = \boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_o \\ \beta_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}$. Soit $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_o \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_2\end{bmatrix}$ l'estimateur habituel de $\boldsymbol{\beta}$. Montrez que $\text{Var}(\hat{\beta}_1) \geq \dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1}$, où $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})^{-1}\boldsymbol{e}'$; et que le minimum est atteint lorsque toutes les covariances entre $\boldsymbol{x}_1$ et les autres variables dans $\mathbf{X}_2$ sont nulles.

3.16 On doit peser 4 objets le plus précisément possible dans une balance à deux plateaux. On pourrait peser chaque objet deux fois (et prendre ensuite la moyenne). Ou encore, on pourrait peser 8 fois les 4 objets à la fois, de la façon suivante: on place certains des objets sur un des plateaux, les autres dans l'autre, et on utilise des poids pour équilibrer. Soit μ_1, μ_2 μ_3 et μ_4 les poids *réels* des 4 objets. Chaque résultat y est une somme d'espérance $w_1\mu_1+w_2\mu_2+w_3\mu_3+w_4\mu_4$, où les w_i prennent les valeurs 1 ou -1 selon que l'objet de moyenne μ_i est dans le plateau de gauche ou de droite. Voici les résultats de 8 pesées :

Objet 1	Objet 2	Objet 3	Objet 4	y
1	1	1	1	20,2
1	-1	1	-1	8,1
1	1	-1	-1	9,7
1	-1	-1	1	1,9
1	1	1	1	19,9
1	-1	1	-1	8,3
1	1	-1	-1	10,2
1	-1	-1	1	1,8

[Par exemple, l'observation y de la 2^e ligne a pour moyenne μ_1-μ_2+μ_3-μ_4]. Le modèle est donc $\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\varepsilon}$, où

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.]$$

On supposera que $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$.

a) Estimer le vecteur $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1 ; \mu_2 ; \mu_3 ; \mu_4]$ par la méthode des moindres carrés et estimer la matrice de covariance de l'estimateur.

b) Supposons que la variance σ^2 définie ci-dessus est la dispersion du résultat d'une pesée, quel que soit le nombre d'objets dans les balances. Comparez la variance $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_i)$ dans le plan d'expérience décrit en a) avec une approche qui consiste à peser chaque objet séparément, deux fois.

c) Généralisation du problème : on a m objets à peser, on pèse différentes combinaisons n fois. Chaque pesée peut être représentée par une ligne d'une matrice $\mathbf{X}$ comme celle montrée plus haut. On considère l'ensemble de toutes les matrices de cette forme, dont les composantes sont des 1, des -1 et également des 0 (correspondant à un objet qui n'est *pas* mis dans la balance.) Montrez que pour minimiser la variance $\mathrm{Var}(\hat{\mu}_i)$, la matrice $\mathbf{X}$ ne doit comprendre aucun 0 et doit satisfaire la condition $\mathbf{X}'\mathbf{X} = n\mathbf{I}_m$.

3.17 L'ellipsoïde $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \le q\hat{\sigma}^2 F_{q;n-q;\alpha}$ est une région de confiance de niveau 1-α pour le paramètre $\boldsymbol{\beta}$.

Dans ce problème, on veut demande ce qu'on peut déduire d'une fonction linéaire $\boldsymbol{\ell}'(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})$, en particulier, quelle est la borne supérieure a de $[\boldsymbol{\ell}'(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})]^2$ qui découle de l'inégalité $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \le q\hat{\sigma}^2 F_{q;n-q;\alpha}$.

a) Montrer que $\boldsymbol{b}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{\ell}$ est un vecteur fixe, alors $(\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{b})^2$ est maximisé sous cette contrainte lorsque $\boldsymbol{b} = \sqrt{\dfrac{k}{\ell'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ell}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ell$ [*Suggestion* : $(\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{b})^2 = [\boldsymbol{\ell}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{1/2}\boldsymbol{b}]^2$, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour montrer que $[\boldsymbol{\ell}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1/2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{1/2}\boldsymbol{b}]^2 \le \boldsymbol{\ell}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{b}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{b}$**].**
[*Rappel* : Soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de même dimension. Alors $(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y})^2 \le \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}$. La borne est atteinte si $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{y}$ pour un certain λ]

b) En déduire que $(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \le q\hat{\sigma}^2 F_{q;n-q;\alpha} \Rightarrow [\boldsymbol{\ell}'(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})]^2 \le \hat{\sigma}\sqrt{\dfrac{qF_{q;n-q;\alpha}}{\ell'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\ell}}$.

Solutions

3.13

Le modèle est $\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 3\sigma^2\mathbf{I}$, où

X =
```
1   1   1   0   0
1   1   0   1   0
1   1   0   0   1
1   0   1   1   0
1   0   1   0   1
1   0   0   1   1
0   1   1   1   0
0   1   1   0   1
0   1   0   1   1
0   0   1   1   1
```

$\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y} =$
```
178.3333
189.3333
189.0000
192.3333
212.0000
```

b)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{y}'[\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\boldsymbol{y}}{10-5} = 72{,}4$$

$\hat{\sigma}$ = 8.508819

Matrice de covariance de $\hat{\boldsymbol{\mu}}$

$\mathbf{V} = \hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} =$
```
20.1111 -4.0222 -4.0222 -4.0222 -4.0222
-4.0222 20.1111 -4.0222 -4.0222 -4.0222
-4.0222 -4.0222 20.1111 -4.0222 -4.0222
-4.0222 -4.0222 -4.0222 20.1111 -4.0222
-4.0222 -4.0222 -4.0222 -4.0222 20.1111
```

c) L'estimateur est $\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\mu}}$, où

L =
```
-1     0     0     0
 1    -1     0     0
 0     1    -1     0
 0     0     1    -1
 0     0     0     1
```

La matrice de covariance de $\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\mu}}$ est

L'VL =
```
          [,1]     [,2]     [,3]     [,4]
[1,]  48.2667 -24.1333   0.0000   0.0000
[2,] -24.1333  48.2667 -24.1333   0.0000
[3,]   0.0000 -24.1333  48.2667 -24.1333
[4,]   0.0000   0.0000 -24.1333  48.2667
```

La statistique F pour tester cette hypothèse est

$$\frac{(\mathbf{L}'\boldsymbol{\mu})'[\mathbf{L}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{L}]^{-1}\mathbf{L}'\boldsymbol{\mu}/4}{\hat{\sigma}^2} = 6.25,$$ ce qui est significatif, le pont critique étant 3,633, valeur p = 0,011..

d)

Le paramètre à estimer est $\boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{\mu}$ où $\boldsymbol{\ell}' = [\,0\ {-1}\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$

L'estimation est $\boldsymbol{\ell}'\hat{\boldsymbol{\mu}}$ **= -0,333**

La variance de l'estimateur est estimée par $\ell'\mathrm{V}\ell$ = 48,26667 et l'écart-type par $(\ell'\mathrm{V}\ell)^{1/2}$ = 6,947422.

La statistique de test est

$$\frac{\boldsymbol{\ell}'\hat{\boldsymbol{\mu}}}{\sqrt{\boldsymbol{\ell}'\mathbf{V}\boldsymbol{\ell}}} = -0{,}048,$$ ce qui n'est manifestement pas significatif. (le point critique à 5 % est 2,57 et la valeur p est 0,9636)

L'intervalle de confiance est [-0,333-2,57(6,947 ; -0,333+2,57(6,947)] = [-18,19 ; 17,53]

e)

$\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1$ = 11

$\sqrt{\hat{\mathrm{V}}(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)}$ = 6.947422

$$\frac{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1}{\sqrt{\hat{\mathbf{V}}(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)}} = 1{,}58$$

Le point critique est 2.570582

La valeur p est 0,174

f)

C'est l'hypothèse $\mathbf{L}'\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ avec

L =
```
-1     0     0     0
 1    -1     0     0
 0     1    -1     0
 0     0     1    -1
 0     0     0     1.
```

L'estimateur de $\mathbf{L}'\boldsymbol{\mu}$ est

$\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\mu}} =$
```
11.0000000
-0.3333333
 3.3333333
19.6666667
```

La matrice de covariance de $\mathbf{L}'\hat{\boldsymbol{\mu}}$ est
```
48.26667 -24.13333   0.00000   0.00000
24.13333  48.26667 -24.13333   0.00000
 0.00000 -24.13333  48.26667 -24.13333
 0.00000   0.00000 -24.13333  48.26667
```

La statistique F est 6,2444 à 4 et 5 degrés de liberté. Le point critique à 5 % est 5,19, donc on rejette H_o. La valeur p est 0,035

g)

La matrice de design ici est

Z

3	0	0	0	0
3	0	0	0	0
0	3	0	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	3	0
0	0	0	3	0
0	0	0	0	3
0	0	0	0	3

$\mathbf{Y'Y} = 18\mathbf{I}_5$

Soit $\sigma^2\mathbf{V}_1 = \sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1}$ et $\mathbf{V}_2 = \sigma^2(\mathbf{Z'Z})^{-1}$ les matrices de covariance de $\hat{\boldsymbol\beta}$ dans le premier plan et le deuxième plan, respectivement.

On va montrer que $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ est semi définie positive, ou encore, que $\mathbf{M} = (\mathbf{X'X})^{-1} - (\mathbf{Z'Z})^{-1}$ est semi définie positive.

On vérifie aisément que $(\mathbf{X'X}) = 3(\mathbf{I}_5+\mathbf{J}_5)$ et que $(\mathbf{X'X})^{-1} = (1/3)\mathbf{I}_5-(1/18)\mathbf{J}$; alors que $(\mathbf{Z'Z})^{-1} = (1/18)\mathbf{I}$. Alors $\mathbf{M} = (\mathbf{X'X})^{-1} - (\mathbf{Z'Z})^{-1} = (1/18)(5\mathbf{I}_5 - \mathbf{J}_5)$. Pour conclure que $\mathbf{M}$ est définie positive, calculons $\boldsymbol{x}'\mathbf{M}\boldsymbol{x}$ pour un $\boldsymbol{x}$ quelconque. On trouve que $\boldsymbol{x}'\mathbf{M}\boldsymbol{x} = (5/18)\boldsymbol{x}'\mathbf{C}\boldsymbol{x} \geq 0$ On a donc $\boldsymbol{x}'\mathbf{M}\boldsymbol{x} \geq 0$ pout tout $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{M}$ est semi-définie positive. On aura l'égalité $\boldsymbol{x}'\mathbf{M}\boldsymbol{x} = 0$ seulement lorsque les composantes de $\boldsymbol{x}$ sont toutes égales.Z

3.14

On utilise à répétition la propriété $\boldsymbol\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol\Sigma_{11} & \boldsymbol\Sigma_{12} \\ \boldsymbol\Sigma_{21} & \boldsymbol\Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} =$

$\begin{bmatrix} \boldsymbol\Sigma_{11.2}^{-1} & -\boldsymbol\Sigma_{11}^{-1}\boldsymbol\Sigma_{12}\boldsymbol\Sigma_{22.1}^{-1} \\ -\boldsymbol\Sigma_{22.1}^{-1}\boldsymbol\Sigma_{12}\boldsymbol\Sigma_{11}^{-1} & \boldsymbol\Sigma_{22.1}^{-1} \end{bmatrix}$, où

$\boldsymbol\Sigma_{22.1}^{-1} = \boldsymbol\Sigma_{22} - \boldsymbol\Sigma_{12}\boldsymbol\Sigma_{22}^{-1}\boldsymbol\Sigma_{21}$ et $\boldsymbol\Sigma_{11.2}^{-1}$ définie de façon analogue. Lorsque $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2]$, $(\mathbf{X'X})^{-1} =$

$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} =$

$\begin{bmatrix} [\mathbf{X}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\mathbf{X}_1]^{-1} & -(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2[\mathbf{X}_2'(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\mathbf{X}_2]^{-1} \\ -[\mathbf{X}_2'(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\mathbf{X}_2]^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} & [\mathbf{X}_2'(\mathbf{I}-\mathbf{P}_1)\mathbf{X}_2]^{-1} \end{bmatrix}$

, $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i(\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}_i'$, i = 1, 2.

$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol\beta}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\boldsymbol{x}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1}$. Donc $\mathrm{Var}(\hat\beta_1) =$

$\dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\boldsymbol{x}_1}$. Le dénominateur est $\boldsymbol{x}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1$ - $\boldsymbol{x}_1'\mathbf{P}_2\boldsymbol{x}_1 \leq \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1$ car $\mathbf{P}_2$ est symétrique et idempotente et donc semi-définie positive. Donc $\mathrm{Var}(\hat\beta_1) =$

$\dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'(\mathbf{I}-\mathbf{P}_2)\boldsymbol{x}_1} \geq \dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1}$

3.15

Soit $\mathbf{X} = [\boldsymbol{e} \mid \mathbf{X}_{12}]$ où $\mathbf{X}_{12}$ $[\boldsymbol{x}_1 \mid \mathbf{X}_2]$.

$(\mathbf{X'X})^{-1} = \begin{bmatrix} n & \boldsymbol{e}'\mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{12}'\boldsymbol{e} & \mathbf{X}_{12}'\mathbf{X}_{12} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{A}_{22}$

$= [\mathbf{X}_{12}'\mathbf{X}_{12} - \mathbf{X}_{12}'\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})^{-1}\boldsymbol{e}'\mathbf{X}_{12}]^{-1} = [\mathbf{X}_{12}'\mathbf{C}\mathbf{X}_{12}]^{-1}$

$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{C}\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1}$. Donc $\mathrm{Var}(\hat\beta_1) =$

$[\boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2[\mathbf{X}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2]^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1]^{-1} =$

$\dfrac{1}{\boldsymbol{x}_1'[\mathbf{C} - \mathbf{C}\mathbf{X}_2[\mathbf{X}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2]^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{C}]\boldsymbol{x}_1} =$

$\dfrac{1}{\boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2[\mathbf{X}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2]^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1}$

3.16

Soit $\mathbf{X}_{1.2} = [\boldsymbol{x}_1 \mid \mathbf{X}_2]$.

$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol\beta}) = \mathrm{Var}\left(\begin{bmatrix} \hat\beta_o \\ \hat\beta_1 \\ \hat{\boldsymbol\beta}_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} & \boldsymbol{e}'\mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{12}'\boldsymbol{e} & \mathbf{X}_{12}'\mathbf{X}_{12} \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \mathrm{Var}\begin{bmatrix} \hat\beta_1 \\ \hat{\boldsymbol\beta}_2 \end{bmatrix} =$

$[\mathbf{X}_{12}'\mathbf{C}\mathbf{X}_{12}]^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{C}\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \mathrm{Var}(\hat\beta_1) =$

$\dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{C}\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1} \geq \dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'\mathbf{C}\boldsymbol{x}_1}$ pour les même raisons qu'au numéro précédent.

3.16

> **X**

1	1	1	1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1
1	-1	-1	1
1	1	1	1
1	-1	1	-1
1	1	-1	-1
1	-1	-1	1

$\boldsymbol{y}$ =

```
20.2
 8.1
 9.7
 1.9
19.9
 8.3
10.2
 1.8
```

$\mathbf{X'X} = 8\mathbf{I}_4$

a)

$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'}\boldsymbol{y}$ =

```
10.0125
 4.9875
 4.1125
 0.9375
```

$\hat{\sigma}$ = 0,220794

$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\sigma}^2 (1/8)\mathbf{I}_4$ =

0.00609375	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00000000	0.00609375	0.00000000	0.00000000
0.00000000	0.00000000	0.00609375	0.00000000
0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00609375

Deuxième plan : La matrice de design est

> **Z**

1	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	1

La matrice de covariance de l'estimateur de $\boldsymbol{\mu}$ est $\sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1}$ dans le premier plan et $\sigma^2(\mathbf{Z'Z})^{-1}$

La variance de $\hat{\mu}_i$ est $\sigma^2/8$ dans le premier plan et $\sigma^2/2$ dans le deuxième. Le premier est nettement meilleur.

c) On peut sans perte de généralité considérer la variance de $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1$, la première composante de $\hat{\boldsymbol{\mu}}$. Soit $\mathbf{X} = [x_1|X_2]$. La matrice de covariance de $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ est $\sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1} = \sigma^2\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1'\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_2'\boldsymbol{x}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^{-1}$. La variance de $\hat{\boldsymbol{\mu}}_1$ est donc $\dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'[\mathbf{I}-\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2']\boldsymbol{x}_1} \geq \dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1}$. Cette borne inférieure n'est atteinte que si $\boldsymbol{x}_1$ est orthogonale aux colonnes de $\mathbf{X}_2$. D'autre part, $\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1$ est le nombre de « 1 » ou de « -1 » dans la colonne $\boldsymbol{x}_1$. Donc $\dfrac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_1}$ est à son minimum si $\boldsymbol{x}_1$ ne comprend aucun 0.