MAT 7381

Devoir 2 – Solutions

Soit $\underset{\sim}{y} = [y_1; y_2; \cdots; y_r]'$. On peut écrire le modèle comme $\underset{\sim}{y} = b\underset{\sim}{e} + \underset{\sim}{\varepsilon}$, $E(b)=\beta$, $Var(b)=\sigma_b^2$, $Var(\varepsilon)=\sigma^2 I$

Donc $\mu = E(y) = \beta \underset{\sim}{e}$ et $\Sigma = Var(\underset{\sim}{y}) = \sigma_b^2 \underset{\sim}{e}\underset{\sim}{e}' + \sigma^2 I$.

a) $E(y_1) = E[\underset{\sim}{e}_1'\underset{\sim}{y}] = e_1'\underset{\sim}{\mu} = \beta$ $(e_1' = [1;0;\cdots;0])$.

$E(\bar{y}) = E\left[\frac{e'y}{r}\right] = \frac{e'\mu}{r} = \beta$

b) $Var(y_1) = Var(\underset{\sim}{e}_1'\underset{\sim}{y}) = e_1'\Sigma e_1 = \sigma_b^2 + \sigma^2$

c) $Cov(y_j; y_k) = \underset{\sim}{e}_j'\Sigma \underset{\sim}{e}_k = \sigma_b^2$

d) $Var(\bar{y}) = Var\left(\frac{\underset{\sim}{e}'y}{r}\right) = \frac{1}{r^2} e'\Sigma e = \frac{1}{r^2}(\sigma_b^2 r^2 + \sigma^2 r)$

$= \sigma_b^2 + \sigma^2/r$

e) $\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = y'Cy$. $E\left[\frac{y'Cy}{r-1}\right] = \frac{1}{r-1}\left[\operatorname{tr} C\Sigma + \mu' C \mu\right]$

$= \frac{1}{r-1}\left[\operatorname{tr} C\sigma^2 I + \beta^2 e'Ce\right] = \sigma^2$

$\frac{y'Cy}{\sigma^2} \sim \chi^2$ ssi $\frac{C}{\sigma^2}\Sigma\frac{C}{\sigma^2} = \frac{C}{\sigma^2}$, ce qui est aisement vérifié

Le nombre de degrés de liberté est $\operatorname{tr}\left(\frac{C}{\sigma^2}\Sigma\right) = r-1$. Le paramètre de non centralité est $\mu'\frac{C}{\sigma^2}\mu = \beta^2\frac{e'Ce}{\sigma^2} = 0$.

f) Puisque $\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = y'Cy = y'C'Cy$ est fonction de Cy, on vérifie que Cy et $\bar{y} = \frac{e'y}{r}$ sont indépendants. Il suffit de montrer que $C\Sigma e = 0$, ce qui est bien vrai.

Devoir 2 – Solutions (suite)

2.18

a) $E(\bar y) = E\left[\frac{e'y}{k}\right] = \frac{1}{k} e'\mu = \frac{1}{k}\alpha k + \frac{1}{k}\beta e'x = \alpha + \beta\bar x$

$Var(\bar y) = \frac{1}{k^2} e'\Sigma e = \frac{1}{k^2}\left[k\sigma^2 + k^2\sigma_a^2\right] = \sigma_a^2 + \frac{\sigma^2}{k}$

b) Soit $F = \left[\frac{e}{k} \,\middle|\, E\right]$. $z = F'y \Rightarrow E(z) = F'\mu = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\bar x \\ \beta E'x\end{bmatrix}$

$$Var(z) = F'\Sigma F = \begin{bmatrix} \frac{e'}{k^2}\Sigma e & \frac{e'}{k}\Sigma E \\ E'\Sigma \frac{e}{k} & E'\Sigma E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 + \frac{\sigma^2}{k} & 0 \\ 0 & \sigma^2 I_{k-1} \end{bmatrix}$$

c) $E(\hat\beta) = \frac{1}{x'Cx} E(x'Cy) = \frac{1}{x'Cx} x'C\mu = \frac{1}{x'Cx} x'C(\alpha e + \beta x)$
$= \frac{\beta x'Cx}{x'Cx} = \beta$. $Var(\hat\beta) = \frac{1}{(x'Cx)^2} x'C\Sigma C x = \frac{1}{(x'Cx)^2} x'(\sigma^2 C)x$
$= \frac{\sigma^2}{x'Cx}$

d) $\hat\sigma^2 = \frac{1}{k-2}\left[y'Cy - \frac{(x'Cy)^2}{x'Cx}\right] = \frac{1}{k-2}\left[y'Cy - \frac{y'Cxx'Cy}{x'Cx}\right]$
$= \frac{1}{k-2} y'\left[C - \frac{Cxx'C}{x'Cx}\right]y = \frac{1}{k-2} y'Ay$ $\left(A = C - \frac{Cxx'C}{x'Cx}\right)$.

$E(\hat\sigma^2) = \frac{1}{k-2}\left[tr\, A\Sigma + \mu'A\mu\right]$. $A\Sigma = \sigma^2 A$ et $A\mu = \beta A x$.

A est symétrique et idempotente, de rang $tr\left(C - \frac{Cxx'C}{x'Cx}\right)$
$= tr\, C - tr\,\frac{x'Cx}{x'Cx} = k-1-1 = k-2$. Alors $tr\, A\Sigma = (k-2)\sigma^2$

$\mu'A\mu = \beta^2 e'Ae = 0$. Donc $E(\hat\sigma^2) = \frac{1}{k-2}\left[tr\, A\Sigma + \mu'A\mu\right]$
$= \frac{1}{k-2}\left[(k-2)\sigma^2 + 0\right] = \sigma^2$. $\frac{(k-2)\hat\sigma^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} y'Ay \sim \chi^2$ ssi

$\frac{A}{\sigma^2}\Sigma\frac{A}{\sigma^2} = \frac{A}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{A}{\sigma^2}(\sigma^2 I + \sigma_a^2 J)\frac{A}{\sigma^2} = \frac{A}{\sigma^2}$, ce qu'on vérifie aisément.

Le paramètre de noncentralité est $\mu'\frac{A}{\sigma^2}\mu = \frac{\beta^2}{\sigma^2} e'Ae = 0$.

e) Le numérateur de $\hat\alpha$ est $(x'x\, e' - \bar x x')y$. L'espérance du numérateur est $(x'x\frac{e'}{n} - \bar x x')(\alpha e + \beta x) = \alpha\left(\frac{x'x\, e'e}{n} - \bar x x'e\right)$
$= \alpha\sum(x_i - \bar x)^2$, car $(x'x\frac{e'}{n} - \bar x x')x = 0$.

2.20

a) $z = A'\underset{\sim}{y}$ où $A' = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \frac{e'_{n-1}}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$. $E(z) = A'(\mu e_n) = \mu = \mu\begin{bmatrix} e_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Var(z) = \sigma^2 A'A = \sigma^2 \begin{bmatrix} I_{n-1} & \frac{e_{n-1}}{n} \\ \frac{e'_{n-1}}{n} & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

b) $E(z_1 \mid \bar{y}) = \mu e_{n-1} + \frac{e_{n-1}}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}(\bar{y} - \mu) = \bar{y}\,\underset{\sim}{e}_{n-1}$

$V(z_1 \mid \bar{y}) = \sigma^2\left[I_{n-1} - \frac{e_{n-1}}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\frac{e'_{n-1}}{n}\right] = \sigma^2\left(I_{n-1} - \frac{e_{n-1}e'_{n-1}}{n}\right) = \sigma^2 B$

$B = I_{n-1} - \frac{e_{n-1}e'_{n-1}}{n} = I_{n-1} - \frac{1}{n}J_{n-1}$

d) La loi conditionnelle de $\underset{\sim}{w} = z_1 - \bar{y}\,\underset{\sim}{e}_{n-1}$ est normale, de moyenne $\underset{\sim}{0}$ et de matrice de covariance $\sigma^2 B$.

$Q = \frac{w'Mw}{\sigma^2}$, où $M = I_{n-1} + J_{n-1}$. Q est de loi χ^2 si $\frac{M}{\sigma^2} B \frac{M}{\sigma^2} = \frac{M}{\sigma^2}$. Verifions : $MB = I_{n-1}$, donc $MBM = M$ et $\frac{M}{\sigma^2} B \frac{M}{\sigma^2} = \frac{M}{\sigma^2}$. Il s'agit d'un variable de loi χ^2.

Le nombre de degrés de liberté est $tr\left(\frac{M}{\sigma^2}\sigma^2 B\right) = tr\, MB = n-1$

Le paramètre de non centralite est $\lambda = 0$ puisque $E(w) = 0$. Puisque cette distribution ne depend pas de $\bar{y}$, Q est independante de $\bar{y}$.