Devoir 1 Solutions

Devoir 1 – Solutions

2.4 $\Sigma(y_i-\bar{y})^2 = y'Cy$ où $C = I - \frac{ee'}{n}$. Donc $E\left(\Sigma(y_i-\bar{y})^2\right)$

$= E\left[y'Cy\right] = \mathrm{tr}\, C\Sigma + \mu' C\mu$. Or $\Sigma = \sigma^2 I$. Donc

$\mathrm{tr}\, C\Sigma + \mu' C\mu = \sigma^2 \mathrm{tr}\, C + \Sigma(\mu_i - \bar{\mu})^2$

$= \sigma^2(n-1) + \Sigma(\mu_i-\bar{\mu})^2$. Finalement

$$E\left(\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n-1}\right) = \sigma^2 + \frac{\Sigma(\mu_i-\bar{\mu})^2}{n-1}.$$

2.6 a) soit $\underset{\sim}{y} = [y_1, \dots, y_n]'$; $\underset{\sim}{a} = [a_1, \dots, a_n]'$. $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$

$\bar{y} = \frac{1}{n} e'y$. Alors $a'y$ est independant de $\bar{y}$ si $a'\Sigma\frac{e}{n} = 0$.

$\Leftrightarrow \Sigma a_i \sigma_i^2 = 0$

b) $\Sigma = \sigma^2 I$. Dans ce cas la condition devient $a'e = 0$

$\Leftrightarrow \Sigma a_i = 0$. Le vecteur $[y_1-\bar{y}, \dots, y_n-\bar{y}]'$ est $y - e\frac{e'y}{n}$

$= \left(I - \frac{ee'}{n}\right)y$. Ce vecteur est indépendant de $\bar{y} = \frac{e'y}{n}$ ssi

$\left(I - \frac{ee'}{n}\right)\frac{e}{n} = 0$. C'est le cas.

2.24 Le vecteur $[y_1-y_2, y_2-y_3, \dots, y_{q-1}-y_q]' = A'y$ où

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix}$$ une matrice $(q-1)\times q$

La somme des carrés $(y_1-y_2)^2 + (y_2-y_3)^2 + \cdots + (y_{q-1}-y_q)^2$

est $y'AA'y$. Selon le numéro 2.26, $\mathrm{Var}(y'AA'y) = 2\,\mathrm{tr}\,(AA'AA')$

$= 2\,\mathrm{tr}\,(A'A\,A'A)$

$$A'A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$ Une matrice $(q-1)(q-1)$

Maintenant $tr(A'AA'A)$ est la somme des carrés de toutes les composantes de $A'A$. La somme des elements de la premièr et la dernière ~~s~~ ligne est 5; elle est égale a 6 pour chacune de $q-3$ autres ligne. Donc la somme des carrés totale est $2(5)+(q-3)(6) = 6q-8$

Finalement, $Var(y'AA'y) = 2\, tr(AA'AA') = 2(6q-8)$
$= 12q-16$.

Numéro 2.8

Pour un vecteur $\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix}$ de loi normale de moyenne $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$, la loi conditionnelle de $\boldsymbol{y}_1$ étant donné $\boldsymbol{y}_2$ est normale de moyenne $\boldsymbol{\mu}_{1.2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22.1}^{-1}\Sigma_{21}$

a) Conditionnellement, x_1 est normale de moyenne $\boldsymbol{\mu}_{1.2} =$ 0.9224791 et de variance $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} =$ 5.216286

b) Conditionnellement, normale de moyenne

$\boldsymbol{\mu}_{1.2} =$
3.068439
3.568139

et de matrice de covariance

$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} =$
6.059780 4.071816
4.071816 19.655963

c) On détermine la distribution de $\boldsymbol{z} = \mathbf{L}'\boldsymbol{x}$, où

L=
1 3
2 4
1 2
6 4

$\mathbf{L}'\boldsymbol{y}$ est normale de moyenne

μ = 33
44

et de matrice de covariance

V
1209.81 1369.25
1369.25 1813.61

La distribution conditionnelle de z_1 étant donné z_2 est normale de moyenne

$\boldsymbol{\mu}_{1.2} =$ 5576044

et de covariance

$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} =$ 8.959545

d) Soit $\boldsymbol{w} = \mathbf{L}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ **où**

L = 1 0
0 2
0 3
0 0

w est de moyenne

L′ μ = 2
23

et de matrice de covariance

Σ = 11.69 37.86
37.86 524.96

La distribution conditionnelle de x_1 étant donné $2x_2+3x_3 = 3$ est normale de moyenne 3,44 et de variance 8,9595.

e) La matrice de covariance du vecteur $\boldsymbol{y} = \mathbf{L}'\boldsymbol{x}$ est diagonale si les colonnes de **L** sont des vecteurs propres de $\boldsymbol{\Sigma}$.
Voici une matrice dont les colonnes sont 4 vecteurs propres indépendants de $\boldsymbol{\Sigma}$

-0.2155303	0.5625518	0.4331523	0.6704187
-0.5611595	0.4790942	-0.6560772	-0.1585291
-0.6870855	-0.1824856	0.5578934	-0.4282143
-0.4081180	-0.6486163	-0.2658887	0.5848417

f)
La moyenne $\bar{x}$ est d'espérance 3.5 et d'écart-type 3.34888. P($\bar{x} \leq$14) = 0.9991418

Solution 2.25.

a) Par la symétrie de A, il existe P orthogonale telle que $A = PDP'$ où D est diagonale. Alors $y'Ay = y'PDP'y = z'Dz$, où $z \sim N(0;I)$

Alors $\mathrm{Var}(y'Ay) = \mathrm{Var}(z'Dz) = \mathrm{Var}(\Sigma \lambda_i z_i^2) = \Sigma \lambda_i^2 \mathrm{Var}(z_i^2)$.

$= \Sigma \lambda_i^2 \left(E(z_i^4) - (E(z_i^2))^2\right) = \Sigma \lambda_i^2 (3-1) = 2 \Sigma \lambda_i^2 = 2 \operatorname{tr} D^2 =$

$2 \operatorname{tr}[P'PD^2] = 2 \operatorname{tr}(P'DPP'DP) = 2 \operatorname{tr} A^2$

b) Si $\Sigma = V(y)$, il existe $\Sigma^{1/2}$, et $z = \Sigma^{-1/2} y \sim N(0;I)$. Alors

$y'Ay = y'\Sigma^{-1/2}\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}\Sigma^{-1/2}y = z'(\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2})z$. Donc $V(y'Ay)$

$= \mathrm{Var}(z'(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})z) = 2 \operatorname{tr}[(\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2})^2] = 2 \operatorname{tr}(A\Sigma A\Sigma)$.

c) $y'Ay = z'(\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2})z$ où $z \sim N(0;I)$. $\exists$ une matrice orthogonale P telle que $\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2} = PDP'$ où D est diagonale. Alors $y'Ay =$

$z'\Sigma^{1/2}A\Sigma^{1/2}z = z'PDP'z = u'Du$ où $u = P'z = P'\Sigma^{-1/2}y$. $u \sim N(0;I)$

De même, $b'y = b'\Sigma^{1/2}PP'\Sigma^{-1/2}y = c'u$, $c = P'\Sigma^{1/2}b$.

Alors $\mathrm{Cov}(y'Ay; b'y) = \mathrm{Cov}(u'Du; c'u) =$

$\mathrm{Cov}(\Sigma \lambda_i u_i^2; \Sigma c_i u_i)$. Par l'indépendance des u_i cette covariance est $\Sigma \mathrm{Cov}(\lambda_i u_i^2; c_i u_i) = \Sigma E(\lambda_i u_i^2 c_i u_i)$

$- \Sigma E(\lambda_i u_i^2) E(c_i u_i) = \quad \Sigma \lambda_i c_i E(u_i^3) - \Sigma E(\lambda_i u_i^2) E(c_i u_i)$

$= 0$ étant donné que $E(u_i) = E(u_i^3) = 0$.

d) $y'Ay = (y-\mu)'A(y-\mu) + 2\mu'Ay - \mu'A\mu \Rightarrow \mathrm{Var}(y'Ay)$

$= \mathrm{Var}[(y-\mu)'A(y-\mu)] + V(2\mu'Ay) + \mathrm{Cov}((y-\mu)'A(y-\mu); 2\mu'Ay)$